1er Parcial (Intensivo 2024)

1. (6 puntos) Demostrar que $S = (-3,1) \cup (7,11)$ es el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\big|5 - |x-4|\big| - 2 < 0$$

2. **(6 puntos)** Dada la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Hallar:

   a. El centro y el radio de la circunferencia.

   b. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P (5,1).

3. **(6 puntos)** Hallar el dominio de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2 + 3x + 2}}$$

4. **(6 puntos)** Dada las siguientes funciones:

$$f(x) = 5x - 1 \;\; y \;\; g(x) = \frac{2}{x-1}$$

Demostrar que:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

5. **(6 puntos)** Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \pi sen(\mathrm{x}) + \frac{\pi}{2} & si \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ arccos(x) & si \quad 0 \leq x < 1 \\ arcsen(x-1) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determinar:

a. Dominio.

b. Puntos de corte con los ejes coordenados.

c. Gráfica.

d. Rango.

Solución

1. **(6 puntos)** Demostrar que $S = (-3,1) \cup (7,11)$ es el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\left|5 - |x-4|\right| - 2 < 0$$

Solución

$$\left|5 - |x-4|\right| < 2$$

Por propiedad de valor absoluto: $|u| < a \rightarrow -a < u < a \; si \; a > 0$:

$$-2 < 5 - |x-4| < 2 \rightarrow -7 < -|x-4| < -3 \rightarrow 3 < |x-4| < 7$$

$$\boxed{3 < |x-4| < 7}$$

Por definición:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & si \quad x \geq 4 \\ 4-x & si \quad x < 4 \end{cases}$$

Dos casos:

1. $x \in [4, +\infty)$

$$3 < x - 4 < 7 \rightarrow 7 < x < 11$$

$$\boxed{S_1 = (7,11) \cap [4, +\infty) = (7,11)}$$

2. $x \in (-\infty, 4)$:

$$3 < 4 - x < 7 \rightarrow -1 < -x < 3 \rightarrow -3 < x < 1$$

$$\boxed{S_2 = (-3,1) \cap (-\infty, 4) = (-3,1)}$$

Luego:

$$\boxed{S = S_1 \cup S_2 = (-3,1) \cup (7,11)}$$

Que era lo que se quería demostrar

1. **(6 puntos)** Dada la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Hallar:

a. El centro y el radio de la circunferencia.

b. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto P (5,1).

Solución

a. $x^2+y^2-4x+6y-12=(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)-4-9-12=0 \to (x-2)^2+(y+3)^2=25$

$$\boxed{(x-2)^2+(y+3)^2=25}$$

Luego:

Centro (2,-3) y Radio=5

b. $P \in circunferencia \to (5-2)^2+(1+3)^2=25$

La recta tangente a la circunferencia en el punto P (5,1) es perpendicular a la recta que pasa por el Centro (2-3) y dicho punto, por lo tanto:

$$m_{tg}=-\frac{1}{m_{\perp}}$$

$$m_{\perp}=\frac{1-(-3)}{5-2}=\frac{4}{3} \to m_{tg}=-\frac{3}{4}$$

Luego la ecuación de la recta tangente en el punto P (5,1) es:

$$\boxed{y-1=-\frac{3}{4}(x-5) \to y=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}}$$

3. **(6 puntos)** Hallar el dominio de la siguiente función:

$$f(x)=\sqrt{\frac{25-x^2}{x^2+3x+2}}$$

Solución

$$D_f=\left\{x \in R / \frac{25-x^2}{x^2+3x+2} \geq 0 \wedge x^2+3x+2 \neq 0\right\}$$

Raíces:

$$25-x^2=0 \to x^2=25 \to |x|=5 \to x=\pm 5$$

$$x^2+3x+2=0 \to (x+2)(x+1)=0 \to x=-2\,, x=-1$$

Cuadro de signo:

	$-\infty$ … -5	-5 … -2	-2 … -1	-1 … 5	5 … $+\infty$
$25-x^2$	-	+	+	+	-
$(x+2)$	-	-	+	+	+
$(x+1)$	-	-	-	+	+
$\frac{25-x^2}{x^2+3x+2}$	-	+	-	+	-

$$\boxed{D_f=\left\{x \in R / \frac{25-x^2}{x^2+3x+2} \geq 0 \wedge x^2+3x+2 \neq 0\right\}=[-5,-2) \cup (-1,5]}$$

4. **(6 puntos)** Dada las siguientes funciones:

$$f(x) = 5x - 1 \;\; y \;\; g(x) = \frac{2}{x-1}$$

Demostrar que:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Solución

Calculemos $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:

$$f(g(x)) = 5g(x) - 1 = \frac{10}{(x-1)} - 1 = \frac{11-x}{(x-1)}$$

$$\boxed{(f \circ g)(x) = \frac{11-x}{(x-1)}}$$

Veamos si es inyectiva:

$$\frac{11-x_1}{(x_1-1)} = \frac{11-x_2}{(x_2-1)} \to x_1 = x_2$$

$(x_2 - 1)(11 - x_1) = (x_1 - 1)(11 - x_2) \to 11x_2 - x_2x_1 - 11 + x_1 = 11x_1 - x_1x_2 - 11 + x_2 \to 10x_2 = 10x_1$

$\to x_2 = x_1$

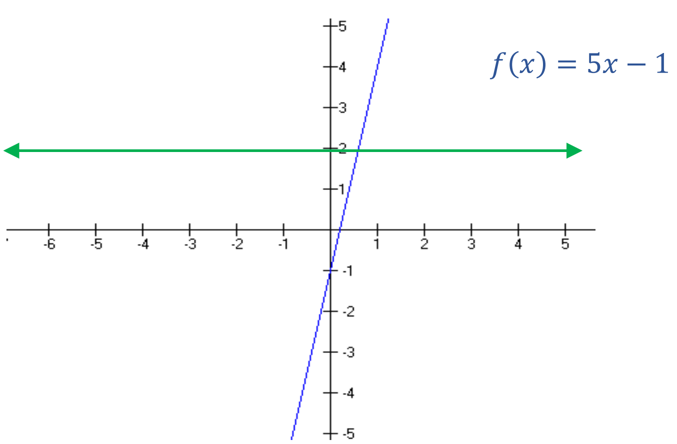
Luego es inyectiva, calculemos $(f \circ g)^{-1}(x)$:

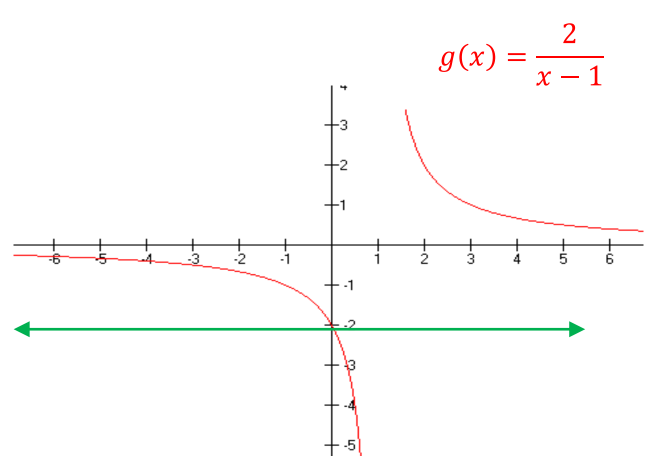
$$y = \frac{11-x}{(x-1)} \to y(x-1) = 11 - x \to yx - y = 11 - x \to yx + x = 11 + y \to x(y+1) = 11 + y \to x = \frac{11+y}{y+1}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{11+x}{x+1}}$$

Las funciones *f(x) y g(x)* son inyectivas, veamos sus gráficas:





Cualquier recta horizontal intersecta las curvas una sola vez, característica de la gráfica de una función inyectiva, esto quiere decir que a cada valor de "y" le corresponde un solo valor de "x".

Calculemos sus inversas:

$$y = 5x - 1 \rightarrow y + 1 = 5x \rightarrow x = \frac{y+1}{5} \rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}}$$

$$y = \frac{2}{x-1} \rightarrow y(x-1) = 2 \rightarrow yx - y = 2 \rightarrow yx = 2 + y \rightarrow x = \frac{2+y}{y} \rightarrow \boldsymbol{g^{-1}(x) = \frac{2+x}{x}}$$

Calculemos $(g^{-1} \circ f^{-1})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)}$:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{2 + f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} = \frac{2 + \frac{x+1}{5}}{\frac{x+1}{5}} = \frac{11+x}{x+1}$$

$$\boxed{(g^{-1} \circ f^{-1})(\boldsymbol{x}) = \frac{11+x}{x+1}}$$

Conclusión:

$$\boxed{(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{11+x}{x+1} \qquad (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{11+x}{x+1}}$$

Por lo tanto:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

Que era lo que se quería demostrar.

5. **(6 puntos)** Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \pi sen(\mathrm{x}) + \frac{\pi}{2} & si \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ arccos(x) & si \quad 0 \leq x < 1 \\ arcsen(x-1) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determinar:

Determinar:

a. Dominio.

b. Puntos de corte con los ejes coordenados.

c. Gráfica.

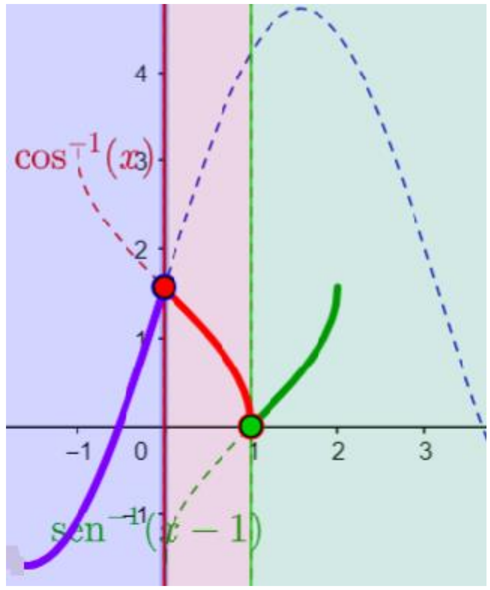
d. Rango.

Solución

a. $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, 2\right]$

d. $R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

c.



$b.\ Punto\ de\ corte\ con\ eje\ y \rightarrow (0, f(0)) = (0, \arccos(0)) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$Punto\ de\ corte\ con\ eje\ x \rightarrow (x, 0) \rightarrow \left\{\left(x, \pi sen(x) + \frac{\pi}{2} = 0\right), (x, \arccos(x) = 0), (x, \text{arcsen}(x-1) = 0)\right\}$

$\pi sen(x) + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow sen(x) = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$

$\arccos(x) = 0 \rightarrow x = \cos(0) \rightarrow x = 1 \notin [0,1)$

$\text{arcsen}(x-1) = 0 \rightarrow x - 1 = \text{sen}(0) \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \in [1,2)$

$Punto\ de\ corte\ con\ eje\ x = \left\{\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right), (1,0)\right\}$